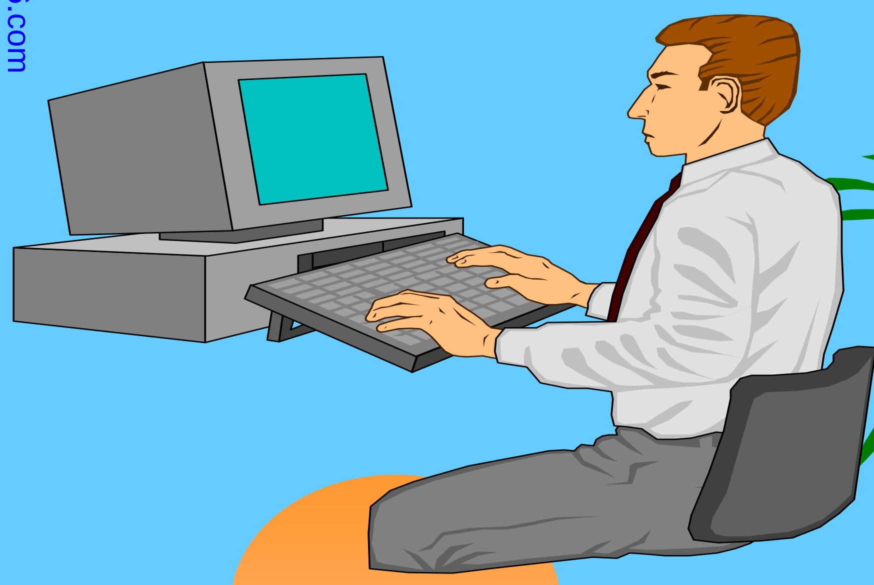
第六章

t检验



统计推断
statistical inference

总体

抽取部分观察单位

样本

统计量

参 数

统计推断

如：总体均数 μ

总体标准差 σ

总体率 π

如：样本均数 $\overline{X}$

样本标准差S

样本率 P

内容：

1. 参数估计 (estimation of parameters)

包括：点估计与区间估计

2. 假设检验（test of hypothesis)

2010年11月30日

t 检 验

第一节 单样本均数的t检验
第二节 配对样本均数的t检验
第三节 两独立样本均数的t检验
第四节 两独立样本方差的齐性检验
第五节 两独立样本方差不齐时均数比较的t’检验
第六节 变量代换

2010年11月30日

t检验概述

- 第八章介绍的*u*检验适用于已知总体标准差的小样本均数的假设检验，或总体标准差未知的大样本均数的假设检验。本章介绍的*t*检验适用于总体标准差未知的小样本均数的假设检验。当样本量较大时，*t*检验与*u*检验可以等同使用。

t 检验的应用条件是

- ①当样本含量较小时，理论上要求样本为来自正态分布总体的随机样本；
- ②当两小样本均数比较时，要求两总体方差相等（方差齐性，即）。在实际工作中，若上述条件略有偏离，仍可进行t检验分析。
- t检验依据的检验统计量是服从t分布的t值。检验界值由附表2的t界值查出，查表方法详见第六章。

2010年11月30日

第一节 单样本均数的*t*检验

对于总体标准差未知的小样本数据(n<60)，单样本均数的假设检验采用*t*检验，计算公式为

$$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}},\quad \nu=n-1$$

- **例10-1** 通过以往大规模调查，已知某地新生儿出生体重均数为3.30kg。从该地难产儿中随机抽取35名新生儿作为研究样本，平均出生体重为3.42kg，标准差为0.40kg，问该地难产儿出生体重是否与一般新生儿出生体重不同？

例 10-1 通过以往大规模调查，已知某地新生儿出生体重均数为 3.30kg。从该地难产儿中随机抽取 35 名新生儿作为研究样本，平均出生体重为 3.42kg，标准差为 0.40kg，问该地难产儿出生体重是否与一般新生儿出生体重不同?

解：本例假定已知总体均数$\mu = 3.30$，但总体标准差σ未知，$n = 35 < 60$，为小样本数据。

1．建立假设，确定检验水准α。

H_0： $\mu = 3.30$（难产儿出生体重总体均数与一般新生儿出生体重总体均数相等）；

H_1： $\mu \neq 3.30$（难产儿出生体重总体均数与一般新生儿出生体重总体均数不等）；

$\alpha = 0.05$

2．计算检验统计量。本例：$n = 35$，$\overline{X} = 3.42$，$S = 0.40$，$\mu_0 = 3.30$，代入公式 10-1，

$$t = \frac{3.42 - 3.30}{0.40/\sqrt{35}} = 1.77,\quad \nu = n - 1 = 35 - 1 = 34$$

单侧检验

- 同样是例10-1的研究样本，双侧检验和单侧检验的结论却截然不同。（p153）所以，确定采用双侧检验还是单侧检验，必须在研究设计阶段根据专业知识预先确定，不能在假设检验结果出来之后随意挑选。

第二节 配对样本均数的*t*检验

- 所谓配对样本（paired sample）是指两个样本中的观察对象由于存在某种联系或具有某些相近的重要特征而结成对子（matching），每对中的两个个体随机分配接受两种不同的处理。

主要有三种情况

- 医学研究中常见的配对样本：
- ①配成对子的两个个体分别给予两种不同的处理（如把同窝、同性别和体重相近的动物配成一对；把同性别、同病情和年龄相近的病人配成一对等）；
- ②同一个体同时分别接受两种不同处理（如同一动物的左右两侧神经、同一份标本分成两部分）；
- ③同一个体自身前后的比较（如高血压患者治疗前后的舒张压比较、肝炎患者治疗前后的转氨酶比较等）。

- 对于配对样本数据，应该首先计算出各对差值的均数。当两种处理结果无差别或某种处理不起作用时，理论上差值的总体均数应该为0，故可将配对样本资料的假设检验视为样本均数与总体均数=0的比较，所用方法为配对*t*检验（paired *t*-test）

3．确定 P 值，下结论。查附表 2，t 界值表中的双侧界值 $t_{0.05/2,34}=2.032$，$t<t_{0.05/2,34}$，$P>0.05$，按 $\alpha=0.05$ 水准，不拒绝 H_0，差异无统计学意义，尚不能认为难产儿平均出生体重与一般新生儿的出生体重不同。

4．计算难产儿出生体重总体均数的95%可信区间：

95%CI：3.28~3.56kg。一般新生儿出生体重总体均数为 $\mu_0=3.30$kg，在可信区间范围内，故尚不能认为难产儿平均出生体重与一般新生儿的出生体重不同。与 t 检验结论相同。

公式为

$$t=\frac{\bar{d}-\mu_d}{S_{\bar{d}}}=\frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}},\quad v=n-1$$

$$S_d=\sqrt{\frac{\Sigma d^2-(\Sigma d)^2/n}{n-1}} \tag{10-2}$$

其中，S_d为差值d的标准差。

例10-2 用简便法和常规法分别对12份人尿进行尿铅含量测定，所得结果如表10-1。问根据现有资料能否说明两种方法检测结果不同？

表 10-1　两法测定 12 份尿铅含量的结果

样品号	尿铅含量（μmol/L）			d^2
	简便法	常规法	差值（d）	
1	3.05	2.80	0.25	0.0625
2	3.76	3.04	0.72	0.5184
3	2.75	1.88	0.87	0.7569
4	3.23	3.43	-0.20	0.0400
5	3.67	3.81	-0.14	0.0196
6	4.49	4.00	0.49	0.2401
7	5.16	4.44	0.72	0.5184
8	5.45	5.41	0.04	0.0016
9	2.06	1.24	0.82	0.6724
10	1.64	1.83	-0.19	0.0361
11	2.55	1.45	1.10	1.2100
12	1.23	0.92	0.31	0.0961
合　计	—	—	4.79	4.1721

1．建立假设、确定检验水准α。

H_0：$\mu_d = 0$（两种方法测定的结果的相同）；

H_1：$\mu_d \neq 0$（两种方法测定的结果不同）；

$\alpha = 0.05$

2．计算检验统计量。

计算得差值d，见表 10-1。本例：$\bar{d} = 4.79/12 = 0.399$，$\Sigma d = 4.79$，$\Sigma d^2 = 4.1721$，代入公式 10-2 计算，有

$$S_d = \sqrt{\frac{4.1721 - (4.79)^2/12}{12-1}} = 0.453$$

$$t = \frac{0.399}{0.453/\sqrt{12}} = 3.051, \quad \nu = 12 - 1 = 11$$

3．查t界值表，确定P值，下结论。

查附表 2，得$t_{0.05/2,11} = 2.201$，$t > t_{0.05/2,11}$，$P < 0.05$，按$\alpha = 0.05$水准，拒绝H_0，接受H_1，两种方法测量结果的差别有统计学意义，可以认为两种方法测定结果不同，即简便法的测量结果要高于常规法。

第三节 两独立样本均数的*t*检验

- 两样本的完全随机分组设计，即将受试对象（试验单位）完全随机地分为两组，分别接受两种不同的处理。由于当两组样本含量相等，两个样本均数之差的抽样误差最小，检验效能最高，故应采用适当的随机分组方法，如随机排列的分段随机化，使两组样本含量相等。

$$t=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{S_c^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}},\quad \nu=n_1+n_2-2$$

$$S_c^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \tag{10-3}$$

$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$表示两样本均数差值的标准误，S_c^2称为合并方差(pooled variance)，它是S_1^2和S_2^2分别以各自的自由度为权数的加权平均后的均方差。

例 10-3 将 14 只大白鼠随机分为两组，一组做成白血病模型鼠，一组为正常鼠，然后测量两组鼠脾脏 DNA 含量（mg/g），问正常鼠和白血病鼠脾脏中 DNA 平均含量是否不同？

白血病组(X_1)：	12.3	13.2	13.7	15.2	15.4	15.8	16.9
正常组(X_2)：	10.8	11.6	12.3	12.7	13.5	13.5	14.8

解：

1．建立假设、确定检验水准α。

H_0：$\mu_1 = \mu_2$（两组鼠脾脏中 DNA 含量的总体均数相同）；

H_1：$\mu_1 \neq \mu_2$（两组鼠脾脏中 DNA 含量的总体均数不同）；

$\alpha = 0.05$

2．计算检验统计量。

本例：$n_1 = 7$，$\bar{X}_1 = 14.64$，$S_1 = 1.62$；$n_2 = 7$，$\bar{X}_2 = 12.74$，$S_2 = 1.33$，按公式10-3，

则

$$S_c{}^2=\frac{(7-1)\times1.62^2+(7-1)\times1.33^2}{7+7-2}=2.197$$

$$t=\frac{|\bar{X}_1-\bar{X}_2|}{\sqrt{S_c{}^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}=\frac{|14.64-12.74|}{\sqrt{2.197\times(\frac{1}{7}+\frac{1}{7})}}=2.398,\quad \nu=7+7-2=12$$

3．查 t 界值表，确定 P 值，下结论。

查附表 2，得 $t_{0.05/2,12}=2.179$，今 $t>t_{0.05/2,12}$，$P<0.05$，按 $\alpha=0.05$ 水准，拒绝 H_0，接受 H_1，两组总体均数的差别有统计学意义，可以认为正常鼠和白血病鼠脾脏中 DNA 平均含量有差别，白血病鼠脾脏中 DNA 平均含量要高于正常鼠。

第四节 两独立样本方差的齐性检验

- 两独立小样本均数的*t*检验，除要求两组数据均应服从正态分布外，还要求两组数据相应的两总体方差相等，即方差齐性（homoscedasticity）。但即使两总体方差相等，两个样本方差也会有抽样误差，两个样本方差不等是否能用抽样误差解释？可进行方差齐性检验。

检验假设为

$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 或 $H_0:\sigma_1^2/\sigma_2^2=1$，备择假设为 $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ 或 $H_1:\sigma_1^2/\sigma_2^2\neq 1$，检验统计量 F 值按式 10-4 计算。

$$F=\frac{S_1^2(较大)}{S_2^2(较小)},\nu_1=n_1-1,\ \ \nu_2=n_2-1 \qquad （10\text{-}4）$$

式中 $S_1{}^2$ 为较大的样本方差，$S_2{}^2$ 为较小的样本方差，分子的自由度为 ν_1，分母的自由度为 ν_2，相应的样本例数分别为 n_1 和 n_2。F 值是两个方差之比，服从 F 分布（见第六章），附表 3 或附表 4 是 $\alpha=0.025$，$\alpha=0.05$ 和 $\alpha=0.01$ 为左侧尾部面积的 F 分布的界值表。由于方差齐性检验是双侧检验，当 H_0：$\sigma_1^2/\sigma_2^2=1$ 成立时，无论 F 值远远大于 1，还是 F 值远远小于 1，都应拒绝 H_0。只是为了计算上的方便，公式 10-4 中规定了必须 $S_1^2\geq S_2^2$，即仅仅考虑到 F 值可能大于 1 的情形，并没有考虑 F 值可能小于 1 的情形。因此，在方差齐性检验时，附表 3 或附表 4 应作为双侧界值表使用，即附表 3 的双侧概率为 $2\alpha=0.05$，附表 4 的双侧概率为 $2\alpha=0.10$ 和 $2\alpha=0.02$。

例 10-4 在例10-3中，自血病鼠：$n_1=7$，$\bar{X}_1=14.64$，$S_1=1.62$；正常鼠：$n_2=7$，$\bar{X}_2=12.74$，$S_2=1.33$。试检验两样本对应的两总体方差是否相等？

①建立假设、确定检验水准α。

H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$（两总体的方差相同）；

H_1：$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$（两总体的方差不同）；

$\alpha=0.05$（双侧）

②计算检验统计量。

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{1.62^2}{1.33^2}=1.484,\quad \nu_1=7-1=6, \nu_2=7-1=6$$

③查 F 界值表，确定 P 值，下结论。

查附表3方差齐性检验的 F 界值表，得 $F_{0.05/2,6,6}=5.82$，今 $F=1.484<F_{0.05/2,6,6}$，$P>0.05$，按 $\alpha=0.05$ 水准，不拒绝 H_0，两组总体方差的差别无统计学意义，尚不能认为两组总体方差不等。

第五节 两样本方差不齐时均数比较的*t'*检验*

- 当两样本方差不齐时，就不能用上述检验方法来进行两样本均数差别的比较，此时可以使用校正*t*检验- *t'*检验来代替。计算步骤是可先按公式10-5求出均数之差的标准误，再用公式10-6计算出统计量，最后用公式10-7、公式10-8计算检验的界值和的界值。

第六节 变量代换*

- 变量代换也称为变量变换，是将原始数据作某种函数转换，如转换为对数值。它的目的是:
- ①使各组数据达到方差齐性。
- ②使资料转换为正态分布，以满足检验和方差分析（见第十一章）的应用条件。
- ③直线化，用于曲线拟合（见第十二章）。

1.对数代换

1.对数变换（logarithmic transformation）即将原始数据 X 的对数值作为新的分析数据。一般取常用对数变换式：

$$X' = \lg X$$

当原始数据中有小值及零时，宜用下式作对数变换：

$$X' = \lg(X+1)$$

亦可根据需要选用下列变换式：

$$X' = \lg(X+k) \text{或} X' = \lg(k-X)$$

式中 k 为常数。

对数变换常用于：①使服从对数正态分布的资料正态化；②使资料达到方差齐性的要求。特别是各样本的标准差与均数之比的比值比较接近时，需经对数变换以缩小各样本方差之间的差别，从而达到方差齐性的要求；③使曲线直线化，如指数曲线、双曲线的直线化等。

2.平方根变换square root transformation

即将原始数据 X 的平方根作为新的分析数据，变换式为：

$$X' = \sqrt{X}$$

当原始数据中有小值以及零时，宜用下式作平方根变换：

$$X' = \sqrt{X+1}$$

平方根变换常用于：①服从 Poisson 分布的计数资料或轻度偏态资料正态化，如放射性物质的计数一般认为服从 Poisson 分布，可通过平方根变换达到正态化；②当各样本的方差与均数间呈正相关时，即均数大，方差也大，通过平方根变换可使资料达到方差齐性的要求。

3.倒数变换（reciprocal transformation）

即将原始数据 X 的倒数作为新的分析数据：

$$X' = 1/X$$

倒数变换常用于数据两端波动较大的资料，从而减小极端值的影响。

4.平方根反正弦变换（square arcsine transformation）

即将原始数据 X 的平方根反正弦值作为新的分析数据：

$$X' = \sin^{-1}\sqrt{X}$$

平方根反正弦变换常用于以率为观察单位的资料，如以不同致畸物质对孕鼠作致畸实验，分娩后记录每个孕鼠子代中畸形的发生率。此时是以孕鼠作为观察单位，观察值为畸形率。一般认为样本率服从二项分布，当总体率较小（如<30%）或较大（如>70%）时，偏离正态较为明显，通过样本率的平方根反正弦变换可使资料接近正态分布，并达到方差齐性的要求。

测试

- 1.两样本均数比较，经检验，差别有显著性时，越小，说明(　)。
- A. 两样本均数差别越大
- B. 两总体均数差别越大
- C. 越有理由认为两总体均数不同
- D. 越有理由认为两样本均数不同
- E. 两总体均数差别越小

- 2. $t< t_{0.05,\ \nu}$，理论上认为(   )。
- A. 两总体均数差别无统计学意义
- B. 两总体均数差别有统计学意义
- C. 两样本均数差别无统计学意义
- D. 两样本均数差别有统计学意义
- E. 两总体均数不同

- 3.两组数据中的每个变量值减同一常数后做两个均数差别的假设检验(　)。
- A. *t*值不变
- B. *t*值变小
- C. *t*值变大
- D. *t*值变小或变大
- E. 无法确定

- 4.两组数据做均数差别的*t*检验，要求(　　)。
- A. 两组数据方差相近
- B. 两组数据均数相近
- C. 两组数据均数相近和方差相近
- D. 数据分布正态或近似正态
- E. 两组数据方差相近，且数据分布正态或近似正态

2. 某单位研究饲料中缺乏维生素E对肝中维生素A含量的影响，将两只同窝、同性别、体重相近的大白鼠配成一对。再将8对动物随机分配到正常饲料组和缺乏维生素E的饲料组，在其它生活条件一致的情况下饲养一定时间后，将大白鼠杀死，测定大白鼠肝中维生素A的含量，所得结果如下表所列，问饲料中缺乏维生素E对鼠肝中维生素A含量有无影响？

不同饲料大白鼠肝中维生素A含量（10^{-3} μmol/L）

大白鼠对子号	用正常饲料组	用缺乏维生素E饲料组
1	3.73	2.58
2	2.09	2.51
3	3.14	1.88
4	4.15	3.35
5	3.98	3.42
6	3.94	2.83
7	3.63	2.62
8	3.21	1.85

3. 某医院将20名贫血患儿随机分为二组，分别接受两种药物治疗，测得血红蛋白增加量（g/L）如下，问

新药与常规药物的疗效是否无差别？

新药组	25	36	25	14	26	34	23	20	15	19
常规药组	14	18	20	15	22	24	21	25	27	23

4. 将20名某病患者随机分为两组，分别用甲、乙两药治疗，测得治疗前后得血沉（mm/h）见下表

问：(1) 甲、乙两药是否均有效？(2) 甲、乙两药疗效是否有差别？

甲、乙两药治疗某病情况

	序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲药	治疗前	30	33	26	31	30	27	28	28	25	29
	治疗后	26	29	23	30	30	24	22	25	23	23
	序号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
乙药	治疗前	29	30	29	33	28	26	30	31	30	30
	治疗后	26	23	25	23	23	25	28	22	27	24